Fusion de croyances
Delivrable ASPIQ
Octobre 2013

1 Introduction

L'un des thèmes de recherche importants en intelligence artificielle (IA) est la dynamique (ou le changement) des croyances. Dans de nombreuses applications, un agent reçoit des informations imparfaites, incomplètes, imprécises ou incertaines sur le monde auquel il est confronté, et il émet des hypothèses qui peuvent être contredites lors de l'arrivée d'une nouvelle information considérée comme plus fiable. Ces hypothèses, qui reflètent la vision qu'un agent intelligent a du monde réel où il vit, et qu'il construit à partir d'informations qu'il reçoit (observations, témoignages), et aussi de son expérience, sont appelées croyances. Quand une information nouvelle et fiable vient contredire les croyances courantes de l'agent, la révision consiste alors à restaurer la cohérence de manière à intégrer la nouvelle information tout en modifiant le moins possible les croyances initiales. Par ailleurs, si l'agent dispose d'informations provenant de plusieurs sources ou si plusieurs agent confrontent leurs informations respectives, l'ensemble de ces informations peut s'avérer contradictoire et la fusion a pour but d'en extraire les informations fiables, en exploitant les complémentarités entre sources, en résolvant les éventuels conflits, de manière á réduire l'imprécision et l'incertitude.

En ce qui concerne la fusion d'informations, de nombreux travaux existent depuis les années 1970 dans le cadre de la théorie des probabilités [48, 23] et des théories de l'incertain (règle de combinaison de Dempster [83] en théorie des fonctions de croyances, et combinaisons conjonctives et disjonctives en théorie des possibilités [36]). Par ailleurs, l'intégration cohérente de bases de données hétérogènes a suscité de nombreux travaux dans le domaine des bases de données depuis les années 1980. Ce n'est qu'à partir du milieu des années 1990 que les approches logiques de la fusion ont suscité un intérêt dans la communauté IA [6, 80, 81, 71, 20]. Un ensemble de postulats permettant de caractériser le comportement rationnel des opérateurs de fusion a été proposé par Konieczny et Pino-Perez [65], à la suite de Revesz [81], dans le même esprit que ceux proposés par AGM pour la révision. La problématique de la fusion multi-source a été l'objet d'une attention particulière de la communauté IA, ces dernières années. De nombreuses approches ont été proposées ces vingt dernières années pour de la fusion d'informations, car il n'existe pas d'opération de fusion universelle, satisfaisante dans toutes les situations. Le choix de la méthode dépend de la nature épistémologique des informations manipulées mais également du contexte d'application [33].

L'objet de ce délivrable est de présenter un panorama des approches de la fusion d'informations. Le document s'articule comme suit. Après la Section 2 qui introduit les notations, la Section 3 est consacrée la fusion dans le cadre de la la logique classique, elle passe en revue les approches sémantiques et syntaxiques ainsi que les liens entre fusion prioritaire et révision itérée. La Section 4 est dédiée à la fusion dans le cadre de l'incertain. Un tour d'horizon des approches de fusion d'informations incertaines est présenté ainsi que la fusion sémantique de bases finies pondérées. Enfin, la Section 5 présente la fusion dans d'autres cadres avant la conclusion en Section 6.

2 Notations

On note $\mathcal{L}$ le langage propositionnel sur un alphabet fini $\mathcal{P}$ de variables propositionnelles (propositions). Un littéral est une proposition ou la négation d'une proposition. Les connecteurs propositionnels usuels sont notés $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ et les constantes Vrai et Faux sont $\top$ et $\bot$, respectivement. Une *base de croyances* K est un ensemble fini de formules propositionnelles de $\mathcal{L}$. Soit $K = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$, $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_m$ est noté $\bigwedge K$. On note $\mathcal{W}$ l'ensemble des interpretations de $\mathcal{L}$ et l'ensemble des modèles d'une formule α est noté $Mod(\alpha)$, i.e. $Mod(\alpha) = \{\omega \in \mathcal{W} : \omega \models \alpha\}$ où $\models$ est la relation d'inférence utilisée pour tirer des conclusions. Soit F et G deux ensembles de formules, $Mod(F) \subseteq Mod(G)$ est noté $F \models G$, de plus $F \equiv G$ si et seulement si $Mod(F) = Mod(G)$. On note $Cn(K)$ l'ensemble des consequences logiques d'une base de croyances K, plus formellement, $Cn(K) = \{\alpha : K \models \alpha\}$.

Un profil de croyances E est un multi-ensemble,$E = \{K_1, \ldots, K_n\}$, où K_i, $1 \leq i \leq n$ est une base de croyances. Un profil de croyances représente les differentes sources d'information. Un exposant appliqué à une base de croyances dans un profil exprime la répétition de cette base dans le profil. Par exemple, dans le profil de croyances $E = \{K_1, \ldots, K_n^m\}$, la base de croyances K_n est répétéee m fois. On note $\mathcal{V}(E)$ l'ensembles des variables propositionnelles apparaissant dans E. Pour simplifier les notations, on note K un profil de croyances constitué d'une seule base $E = \{K\}$. En ce qui concerne l'union, on note $\bigcup E$ l'ensemble $K_1 \cup \cdots \cup K_n$. Les n bases de croyances $K_1, \ldots, K_n$ ne sont pas nécessairement différentes et l'union des bases de croyances prenant compte des répétitions est notée $\sqcup$. Par ailleurs, on note $K_i \wedge K_j$ la base de croyances $K_i \cup K_j$ et $\bigwedge E$ la conjonction bases de croyances, i. e. $\bigwedge E = \bigwedge K_1 \wedge \cdots \wedge \bigwedge K_n$ et $\bigvee E$ la disjonction bases de croyances, i. e. $\bigvee E = \bigwedge K_1 \vee \cdots \vee \bigwedge K_n$. On dit que E est cohérent si et seulement si $\bigwedge E$ est cohérent. De plus, soit K une base de croyances, $E \wedge K$ est défini comme un raccourci pour $\{K_1 \wedge K, \ldots, K_n \wedge K\}$. Soit μ une formule, On dit que $E \wedge \mu$ est cohérent si et seulement si $\bigwedge E \wedge \mu$ est cohérent. Soit $E_1 = \{K_{1,1}, \ldots, K_{1,n}\}$ et $E_1 = \{K_{2,1}, \ldots, K_{2,n}\}$ deux profils de croyances, E_1 et E_2 sont equivalents, noté $E_1 \equiv E_2$, si et seulement si il existe une bijection f telle que $\forall K_{1,i} \in E_1$, $\exists K_{2,j} \in E_2$ telle que $f(K_{1,i}) \equiv K_{2,j}$.

Dans les approches syntaxiques de la fusion le résultat peut être une une base de croyances ou un un multi-ensemble [43], c'est à dire l'ensemble des bases de croyances alternatives resultant du processus de fusion, de façon similaire aux extensions dans le le raisonnement par défaut [78]. Afin d'étudier les propriétés logiques de la fusion de bases de croyances, comme dans [43], les consequences logiques d'un multi-ensemble sont définies par $Cn(F) = \bigcup_{i=1}^{n} Cn(F_i)$ où $F = \{F_1, \ldots, F_n\}$ est un multi-ensemble.

Un pré-ordre sur un ensemble A est une relation binaire réflexive et transitive. Un pré-ordre total, noté $\leq$, est un pré-ordre tel que $\forall x, y \in A$ on a soit $x \leq y$ soit $y \leq x$. L'équivalence est définie par $x \simeq y$ si et seulement si $x \leq y$ et $y \leq x$. Le pré-ordre total strict, noté $<$, est la relation définie par $x < y$ si et seulement si on a $x \leq y$ mais on n'a pas $x \simeq y$. Soit M un sous-ensemble de A, l'ensemble des élements minimaux de M par rapport à $\leq$, noté $min(M, \leq)$, est défini par $min(M, \leq) = \{x \in M, \nexists y \in M : y < x\}$. L'ordre total alphabétique est noté $\leq_{lex}$.

3 Approche logique de la fusion d'informations

Les opérateurs de fusion tentent de réaliser une synthèse entre un ensemble d'informations fournies par des sources différentes. Ces sources, même si elles sont individuellement cohérentes, contiennent la plupart du temps des informations mutuellement conflictuelles. Comme pour la révision, on peut énoncer des principes qui régissent la fusion d'informations également fiables :

- *Principe d'Optimisme*: on doit utiliser au maximum toutes les informations fournies par les sources.
- *Principe d'Equité*: le résultat de la fusion ne doit favoriser aucune des sources.
- *Principe de Cohérence*: Après fusion, l'ensemble des informations doit être cohérent.

Ces opérateurs permettent donc de définir un ensemble cohérent d'informations à partir d'ensembles dont l'union est incohérente, mais également de faire surgir des informations qu'aucune des sources initiales prises isolément ne permettrait d'inférer. Cette faculté illustre le principe d'optimisme. Par exemple si une des sources d'information sait que a est vrai et qu'une autre source sait que $a \rightarrow b$, alors l'information synthétisée permet de savoir que b est vrai alors qu'aucune des deux sources ne le sait. Le principe d'équité suggère que l'information résultante doit garder trace de soit toutes les sources, soit d'aucune. Ce principe est valide aussi bien pour la fusion d'information que l'agrégation de préférence. Néanmoins les deux problèmes sont distincts même s'ils ont beaucoup d'outils en commun. En agrégation de préférences, le résultat peut être logiquement incompatible avec les préférences de chaque source pourvu qu'il réalise un compromis acceptable. Certains auteurs proposent également comme principe d'équité pour la fusion d'information, de ne pas pouvoir accepter un résultat rejeté par toutes les sources [32]. Le dernier principe (de cohérence) est valide aussi bien pour la révision que la fusion.

Il y a essentiellement deux familles d'approches pour la fusion d'informations: les approches numériques et les approches basées sur la logique. Les approches numériques sont les plus anciennes et concernent des domaines comme la fusion d'opinions d'experts souvent représentées par des distributions de probabilité, et la robotique où on fusionne des informations issues de capteurs. Les approches symboliques de la fusion multi-sources ont donné lieu à de nombreux travaux dans la communauté IA depuis les années 1990 [6, 80, 70, 81, 19]. Quand elles sont indépendantes de la syntaxe, les approches symboliques se retrouvent assez proches des techniques de fusion d'information basées sur la théorie des possibilités proposées quelques années auparavant [36, 39, 16].

3.1 Approche sémantique de la fusion sous contraintes

Dans la suite nous considérons un *profil*, noté $E = \{K_1, \ldots, K_n\}$, qui est un multi-ensemble de n bases logiques [1] représentant des croyances ou des préferences booléennes. Le profil représente les informations détenues par un groupe d'agents. On note $\bigwedge E$, la base $K_1 \cup \cdots \cup K_n$ qui a pour modèles l'intersection des ensembles de modèles des bases K_i. Un profil E est cohérent si et seulement si $\bigwedge E$ est cohérent. On note $E = E_1 \sqcup E_2$ le profil obtenu par la concaténation des deux profils E_1 et E_2. Par extension $K_1 \sqcup \ldots \sqcup K_n$ est le profil composé de ces bases logiques K_i.

Dans le même esprit que les postulats AGM pour la révision, Konieczny et Pino-Perez [66] ont proposé des postulats représentant les propriétés que l'on est en mesure d'attendre des opérateurs de fusion lorsque l'on suppose que toutes les sources sont aussi fiables les unes que les autres. Les propriétés attendues s'expriment intuitivement comme suit. Les sources sont mutuellement indépendantes et aucun lien entre les sources n'est supposé. Toutes les sources sont d'égale importance et elles fournissent des bases logiques cohérentes. Chaque source fournit des informations de même fiabilité ou priorité. Plus formellement, un opérateur de fusion contrainte Δ est une fonction qui à partir d'un profil E et d'une formule μ, représentant les contraintes d'intégrité[2], renvoie une base $\Delta_\mu(E)$ qui satisfait les propriétés suivantes :

(IC0) $\Delta_\mu(E) \models \mu$.

(IC1) Si μ est cohérent, alors $\Delta_\mu(E)$ est cohérent.

(IC2) Si E est cohérent avec μ, alors $\Delta_\mu(E) = \bigwedge E \wedge \mu$.

(IC3) Si $E_1 \equiv E_2$ et $\mu_1 \equiv \mu_2$, alors $\Delta_{\mu_1}(E_1) \equiv \Delta_{\mu_2}(E_2)$.

[1] Cette approche est sémantique, et ces bases logiques sont définies à une équivalence près.

[2] Lorsque la fusion n'est pas contrainte, il suffit de poser $\mu = \top$, i.e. μ est une tautologie.

(IC4) Si $K \models \mu$ et $K' \models \mu$, alors $\Delta_\mu(K \sqcup K') \wedge K \not\models \bot$ implique $\Delta_\mu(K \sqcup K') \wedge K' \not\models \bot$.

(IC5) $\Delta_\mu(E_1) \wedge \Delta_\mu(E_2) \models \Delta_\mu(E_1 \sqcup E_2)$.

(IC6) Si $\Delta_\mu(E_1) \wedge \Delta_\mu(E_2)$ est cohérent, alors $\Delta_\mu(E_1 \sqcup E_2) \models \Delta_\mu(E_1) \wedge \Delta_\mu(E_2)$.

(IC7) $\Delta_{\mu_1}(E) \wedge \mu_2 \models \Delta_{\mu_1 \wedge \mu_2}(E)$.

(IC8) Si $\Delta_{\mu_1}(E) \wedge \mu_2$ est cohérent, alors $\Delta_{\mu_1 \wedge \mu_2}(E) \models \Delta_{\mu_1}(E) \wedge \mu_2$.

Une partie de ces propriétés avait déjà été proposée par Revesz [81] pour caractériser ce qu'il appelle les opérateurs d'adéquation sémantique (*model fitting*). La signification intuitive de ces propriétés est la suivante : (**IC0**) assure que le résultat de la fusion satisfait les contraintes d'intégrité. (**IC1**) dit que si les contraintes d'intégrité sont cohérentes alors le résultat de la fusion est cohérent, c'est-à-dire que l'on peut toujours extraire des informations cohérentes du groupe d'agents. (**IC2**) est la propriété d'optimisme. Elle demande que, lorsque c'est possible, le résultat de la fusion soit simplement la conjonction des informations et des contraintes d'intégrité. Donc, lorsqu'il n'y a pas de conflit entre les agents et les contraintes, la fusion est simplement l'union des différentes bases logiques. (**IC3**) dit que le résultat de la fusion ne dépend pas de la forme syntaxique des informations. (**IC4**) est la propriété d'équité. Elle assure que lorsque l'on fusionne l'opinion de deux agents, l'opérateur ne peut pas donner de préférence à l'un d'eux. (**IC5**) et (**IC6**) ensemble, expriment le fait que, dès que l'on peut trouver deux sous-groupes qui s'accordent sur au moins une alternative, alors le résultat de la fusion sera exactement l'ensemble des alternatives sur lesquelles ces deux groupes s'accordent. (**IC7**) et (**IC8**) expriment des conditions sur les conjonctions de contraintes d'intégrité et s'assurent de ce fait que la notion de *proximité* est bien fondée sur un préordre exprimant l'idée de plausibilité qui guide le processus de fusion.

Il est également possible de contraindre un peu plus ces opérateurs pour définir des sous-classes d'opérateurs, ayant par exemple un comportement majoritaire ou d'arbitrage (égalitaire) [66].

Tout comme dans le cas de la révision, un théorème de représentation montre qu'un opérateur de fusion contrainte correspond à une famille de pré-ordres sur les interprétations. Pour cela, une *affectation syncrétique* est définie. C'est une fonction qui associe à chaque profil E un pré-ordre $\leq_E$ sur les interprétations tel que pour tous profils E, E_1, E_2 et pour toutes bases K, K' les conditions suivantes sont satisfaites :

1) Si $\omega \models \bigwedge E$ et $\omega' \models \bigwedge E$, alors $\omega \simeq_E \omega'$.

2) Si $\omega \models \bigwedge E$ et $\omega' \not\models \bigwedge E$, alors $\omega <_E \omega'$.

3) Si $E_1 \equiv E_2$, alors $\leq_{E_1} = \leq_{E_2}$.

4) $\forall \omega \models K \ \exists \omega' \models K' \ \omega' \leq_{K \sqcup K'} \omega$.

5) Si $\omega \leq_{E_1} \omega'$ et $\omega \leq_{E_2} \omega'$, alors $\omega \leq_{E_1 \sqcup E_2} \omega'$.

6) Si $\omega <_{E_1} \omega'$ et $\omega \leq_{E_2} \omega'$, alors $\omega <_{E_1 \sqcup E_2} \omega'$.

Les conditions **(1)** et **(2)** expriment le principe d'optimisme. Mais **(1)** interdit que le résultat ne soit arbitrairement précis. **(3)** signifie que le pré-ordre ne dépend que du profil. Ces trois conditions sont une généralisation des conditions de l'affectation fidèle pour les opérateurs de révision [60]. **(4)** exprime le principe d'équité : le pré-ordre associé à un profil composé de deux bases logiques est tel que pour chaque modèle de l'une, il existe un modèle de l'autre qui est au moins aussi bon. **(5)** est une propriété de monotonie de l'agrégation au sens large (condition de type Pareto en théorie de la décision) et **(6)** renforce un peu cette propriété en exigeant la monotonie stricte (condition forte de Pareto).

Le théorème de représentation pour les opérateurs de fusion contrainte est énoncé comme suit dans [66] [3] :

Théorème 1 *Un opérateur Δ_μ est un opérateur de fusion contrainte si et seulement si il existe une affectation syncrétique qui associe à chaque profil E un pré-ordre total $\leq_E$ tel que $Mod(\Delta_\mu(E)) = \min(Mod(\mu), \leq_E)$.*

La fusion contrainte généralise la révision de croyances. En effet, les conditions **(1)**, **(2)** et **(3)** vérifiées par une affectation syncrétique pour la fusion sont similaires aux conditions respectées par une affectation fidèle pour la révision. De plus, il est possible de définir un opérateur de révision à partir d'un opérateur de fusion contrainte [66]. Soit $\circ$ un opérateur de révision défini à partir d'un opérateur de fusion contrainte Δ_μ tel que $K \circ \mu = \Delta_\mu(\{K\})$. Si Δ_μ satisfait (**IC0**)-(**IC8**) alors $\circ$ satisfait les postulats **(R1)-(R6)** proposés par Katsuno et Mendelzon [60].

Plusieurs approches de fusion sémantique ont été proposées, nous présentons l'une des principales approches, la famille des opérateurs de fusion à base de distances.

Opérateurs à base de distances L'approche décrite ci-dessus est indépendante de la syntaxe et peut donc se coder par une opération d'agrégation entre relations d'ordre sur les modèles. Il est plus facile de coder ces préordres par des fonctions de valeurs numériques. Les dépendances entre affectation fidèle et base logique font qu'une interprétation est d'autant plus plausible qu'elle est proche des modèles de la base, et il est naturel de coder la plausibilité (ou préférence) relative (qui s'interprète naturellement en théorie des possibilités) en termes de distance $d(\omega, \omega')$ entre interprétations [4].

Les opérateurs à base de modèles sélectionnent donc les interprétations les plus proches du profil. Ces opérateurs sont paramétrés par une distance et une fonction d'agrégation [66]. Une fonction d'agrégation [51] f est une fonction

[3] pour sa généralisation au cas infini, voir [18].

[4] On utilise en fait une pseudo-distance qui vérifie $d(\omega, \omega') = d(\omega', \omega)$, et $d(\omega, \omega') = 0$ si et seulement si $\omega = \omega'$, car l'inégalité triangulaire n'est pas nécessaire.

qui associe un réel positif à tout n-uplet fini de réels positifs tel que pour tout $x_1, \ldots, x_n, x, y \in \mathbb{R}^+$:

- si $x \leq y$, alors $f(x_1, \ldots, x, \ldots, x_n) \leq f(x_1, \ldots, y, \ldots, x_n)$ *(monotonie)*
- $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ si et seulement si $x_1 = \ldots = x_n = 0$ *(minimalité)*
- $f(x) = x$ *(identité)*

Soit d une distance entre interprétations; le pré-ordre $\leq_E$ sur les interprétations est défini par : $\omega \leq_E \omega'$ si et seulement si $d(\omega, E) \leq d(\omega', E)$, avec $d(\omega, E) = f(d(\omega, K_1) \ldots, d(\omega, K_n))$, où $E = \{K_1, \ldots, K_n\}$, et $d(\omega, K_i) = \min_{\omega' \models K_i} d(\omega', \omega)$. Un opérateur de fusion $\Delta_\mu^{d,f}$ est défini par : $Mod(\Delta_\mu^{d,f}(E)) = \min(Mod(\mu), \leq_E)$. Les opérateurs étudiés dans [81, 71] sont des cas particuliers utilisant la distance de Hamming et les fonctions d'agrégation Σ ou max. Il a été montré ensuite [66] que les propriétés de ces opérateurs étaient les mêmes quelle que soit la distance utilisée. Si la fonction d'agrégation f a de bonnes propriétés, comme les fonctions usuelles (le maximum, la somme, le leximax, la somme des puissances n^{iemes}, le leximin), les opérateurs à base de modèles ainsi produits, quelle que soit la distance, sont des opérateurs de fusion contrainte et on a les résultats suivants [63]:

Théorème 2 *Soit d une distance entre interprétations et f une fonction d'agrégation, l'opérateur $\Delta^{d,f}$ satisfait les propriétés* **(IC0)**, *(***IC1***), (***IC2***), (***IC3***), (***IC7***) et (***IC8***).*

Théorème 3 *Soit d une distance entre interprétations et f une fonction d'agrégation, l'opérateur $\Delta^{d,f}$ satisfait les propriétés* **(IC0)**-**(IC8)** *si et seulement si la fonction d'agrégation f satisfait les propriétés suivantes:*

- *Pour toute permutation des indices σ, $f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ (symétrie)*
- *Si $f(x_1, \ldots, x_n) \leq f(y_1, \ldots, y_n)$, alors $f(x_1, \ldots, x_n, z) \leq f(y_1, \ldots, y_n, z)$. (composition)*
- *Si $f(x_1, \ldots, x_n, z) \leq f(y_1, \ldots, y_n, z)$, alors $f(x_1, \ldots, x_n) \leq f(y_1, \ldots, y_n)$. (décomposition)*

Au lieu d'utiliser une distance numérique entre les interprétations, on peut utiliser comme mesure l'ensemble des variables en conflit. Cela conduit à une famille plus générale d'opérateurs étudiés dans [42].

Par ailleurs, une nouvelle famille d'opérateurs de fusion, paramétrée par une distance et deux fonctions d'agrégation, appelés opérateurs de fusion DA^2 (Pour 1 **D**istance et **2** fonctions d'**A**grégation) a été défini dans [63]. Soit d une distance entre interprétations et deux fonctions d'agrégation f et g. Le pré-ordre $\leq_E$ sur les interprétations est défini par $\omega \leq_E \omega'$ si et seulement si $d(\omega, E) \leq d(\omega', E)$ avec $d(\omega, E) = f(d(\omega, K_1) \ldots, d(\omega, K_n))$, où $E = \{K_1, \ldots, K_n\}$ et $d(\omega, K_i) = g(d(\omega, \alpha_1) \ldots, d(\omega, \alpha_{m_i}))$, où $K_i = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{m_i}\}$. L'opérateur de fusion DA^2 $\Delta_\mu^{d,f,g}$ est défini tel que $Mod(\Delta_\mu^{d,f,g}(E)) = \min(Mod(\mu), \leq_E)$. La première fonction d'agrégation g permet d'extraire une information cohérente de la base K_i même si celle-ci est incohérente[5]. Puis la seconde fonction f réalise l'agrégation entre sources. Ces opérateurs sont une généralisation des opérateurs de fusion à base de modèles usuels, ils permettent également de capturer certains opérateurs de fusion à base de formules.

D'autres approches de la fusion sémantique ont été proposées, en particulier, celle basée sur les opérations de morphologie mathématique [17] et celles basées sur les équivalences de re-écritures de formules [28].

L'inconvénient principal des opérateurs de fusion sémantiques usuels est qu'ils ne permettent pas de prendre en compte les bases incohérentes. Or, dans certains cas, il peut être nécessaire ou simplement utile d'utiliser ces informations. Les opérateurs de fusion DA^2 permettent d'éviter ces deux écueils. Les résultats de complexité montrent en particulier que d'un point de vue calculatoire, ces opérateurs de fusion à partir de distances ne sont pas plus complexes que les opérateurs à base de modèles usuels, et restent au deuxième niveau de la hiérarchie polynomiale.

3.2 Approche syntaxique de la fusion

La définition d'opérations de fusion qui peuvent être implantés efficacement nécessite un cadre de représentation fini. Par ailleurs, comme le souligne Hansson [54] les structures infinies sont cognitivement inaccessibles et les operations de changement sur de telles structures peuvent devenir infinies. Aussi, suivant ce point de vue [53], des opérations de fusion ont été définies sur des bases de croyances, i.e. des ensembles finis de formules. La fusion opère sur un profil de bases de croyances finies et le résultat de la fusion dépend de la présentation syntaxique des bases de croyances es intervenant dans la fusion.

Les opérateurs de fusion syntaxiques font appel aux notions de sous-ensembles maximaux cohérents et sous-ensembles minimaux incohérents.

Définition 1 *Soit K une base de croyances et μ une formule. Un sous-ensemble maximal cohérent de $K \cup \{\mu\}$ est un ensemble fini de formules M tel que (i) $M \subseteq K \cup \{\mu\}$, (ii) $\mu \in M$, (iii) M est cohérent, (iv) si $\forall M'$, $M \subset M' \subseteq K \cup \{\mu\}$, alors M' is incohérent.*

Dans la suite On note $MC(K, \mu)$ l'ensemble des sous-ensembles maximaux cohérents de $K \cup \{\mu\}$. La notion de sous-ensembles maximaux cohérents a été étendue aux profils comme suit : $MC(E, \mu) = MC(\bigcup_{K_i \in E} K_i, \mu)$ et lorsque la maximalité est définie en terme de cardinalité plutôt qu'en terme d'inclusion ensembliste la notation $MC_{Card}(E, \mu)$ est utilisée.

Définition 2 *Soit K une base de croyances et μ une formule. Un sous-ensemble minimal incohérent de $K \cup \{\mu\}$ est un ensemble fini de formules C tel que i)*

[5] Ce n'est donc plus une approche purement sémantique; en fait toute base K_i est vue comme un (sous-)profil.

$C \subseteq K \cup \{\mu\}$, *ii)* C *est incohérent, (iii) si* $\forall C'$, $C' \subset C \subseteq K \cup \{\mu\}$, *alors* C' *est cohérent.*

Falappa et al. [44] ont proposé des postulats afin de classer les opérateurs de fusion de bases de croyances raisonnables. Les opérateurs de fusion sont considérés comme des opérateurs binaires symétriques où les bases de croyances K et A sont traitées de manière symétrique. Soit K, H, A, B des bases de croyances, α une formule et $\triangle$ un opérateur de fusion.

Inclusion	$K\triangle A \subseteq K \cup A$.
Symétrie	$K\triangle A = A\triangle K$.
Cohérence forte	$K\triangle A$ est cohérent.
Congruence	Si $K \cup A = H \cup B$ alors $K\triangle A = H\triangle B$.
Vacuité	Si $K \cup A$ est cohérent alors $K\triangle A = K \cup A$.
Reversion	Si $K \cup A$ et $H \cup B$ ont les mêmes sous-ensembles minimaux incohérents alors $(K \cup A)\backslash(K\triangle A) = (H \cup B)\backslash(H\triangle B)$.
Pertinence globale	Si $\alpha \in (K \cup A)\backslash(K\triangle A)$ alors il existe un ensemble C t. q. $K\triangle A \subseteq C \subseteq (K \cup A)$, C est cohérent mais $C \cup \{\alpha\}$ est incohérent.
Conservation essentielle globale	Si $\alpha \in (K \cup A)\backslash(K\triangle A)$ alors il existe un ensemble C t.q. $C \subseteq (K \cup A)$, C est cohérent mais $C \cup \{\alpha\}$ est incohérent.

Inclusion assure que l'union des bases de croyances initiales est une borne supérieure de toute opération de fusion. *Symétrie* est la propriété d'équité, toutes les bases de croyances sont dégale importance. *Cohérence forte* requiert la cohérence du résultat de la fusion. *Congruence* dit que le resultat de la fusion ne dépend pas de la forme syntaxique des bases de croyances. *Vacuité* est la propriété d'optimisme, elle dit que si l'union des bases de croyances est cohérent alors le résultat de la fusion est égal à cette union. *Reversion* dit que si deux bases de croyances ont les mêmes sous-ensembles minimaux incohérents alors les formules retirées dans les ensembles respectifs sont les mêmes. *Pertinence globale* et *Conservation essentielle globale* expriment l'intuition que rien n'est retiré des bases de croyances initiales si ce n'est pour restaurer la cohérence. *Inclusion*, *Symétrie*, *Congruence* et *Pertinence globale* ont été proposées dans [47], *Reversion* et *Conservation essentielle globale*[6] ont été proposées par Falappa et al. dans [45].

Opérateurs de combinaison Lorsque les bases sont des ensembles finis de formules, les opérateurs de combinaison sélectionnent, dans l'union des bases, des sous-bases maximales cohérentes .

Les opérateurs de combination $Comb1(E, \mu)$, $Comb3(E, \mu)$, $Comb4(E, \mu)$ proposés dans [6, 7] Ont été reformulés en $\Delta_\mu^{C1}(E)$, $\Delta_\mu^{C3}(E)$ et $\Delta_\mu^{C4}(E)$ respectivement [61, 64] comme suit :

[6]Global core-retainment en anglais

$\Delta_\mu^{C1}(E) = MC(E, \mu)$,
$\Delta_\mu^{C3}(E) = \{M \;:\; M \in MC(E, \top)$ et $M \cup \{\mu\}$ est cohérent $\}$,
$\Delta_\mu^{C4}(E) = MC_{Card}(E, \mu)$ et
$\Delta_\mu^{C5}(E) = \{M \;:\; M \in MC(E, \top)$ et $M \cup \{\mu\}$ est cohérent$\}$ si cet ensemble est non vide et μ sinon.

Ces méthodes de fusion ont l'inconvénient de perdre l'origine des informations et ne permettent donc pas de tenir compte de la distribution de l'information entre les sources. Ceci est très gênant pour tenir compte de la majorité, par exemple.

Opérateurs de fusion à base de distances Il a donc été proposé [61] d'utiliser des fonctions de sélection, inspirées des fonctions de sélection relationnelle transitive définies pour la révision, afin de tenir compte de cette distribution. Cela permet d'obtenir des opérateurs avec de meilleures propriétés logiques et donc un meilleur comportement. Dans [61] trois critères particuliers ont été étudié.

Le premier (Δ^d) sélectionne les sous-bases maximales cohérentes avec le plus de bases possibles. Plus formellement, $\Delta_\mu^D(E) = \{M \in \Delta_\mu^{C1}(E) \;:\; dist_D(M, E) = min_{M \in \Delta_\mu^{C1}(E)}(dist_D(M, E)\}$ où $dist_D(M, E) = \Sigma_{K \in E} dist_D(M, K)$ et $dist_D(M, K) = 0$ si $M \cup K$ est cohérent, sinon $dist_D(M, K) = 1$. Il vérifie les postulats (**IC0**)-(**IC2**), (**IC3**), (**IC5**) et (**IC7**).

Le deuxième ($\Delta^{S,\Sigma}$) sélectionne les sous-bases maximales cohérentes qui ont la plus petite différence (symétrique) pour la cardinalité avec les bases. Plus formellement, $\Delta_\mu^{S,\Sigma}(E) = \{M \in \Delta_\mu^{C1}(E) \;:\; dist_S(M, E) = min_{M \in \Delta_\mu^{C1}(E)}(dist_S(M, E)\}$ où $dist_S(M, E) = \Sigma_{K \in E} dist_S(M, K)$ et $dist_S(M, K) = \mid K \backslash M \mid + \mid M \backslash K \mid$. Il satisfait les postulats (**IC0**)-(**IC2**), (**IC3**), (**IC7**) et (**IC8**).

Le troisième ($\Delta^{\cap,\Sigma}$) sélectionne les sous-bases maximales cohérentes qui ont la plus grande intersection (pour la cardinalité) avec les bases. Plus formellement, $\Delta_\mu^{\cap,\Sigma}(E) = \{M \in \Delta_\mu^{C1}(E) \;:\; dist_\cap(M, E) = min_{M \in \Delta_\mu^{C1}(E)}(dist_\cap(M, E)\}$ où $dist_\cap(M, E) = \Sigma_{K \in E} dist_\cap(M, K)$ et $dist_\cap(M, K) = \mid K \cap M \mid$. Il satisfait les postulats (**IC0**)-(**IC2**), (**IC5**)-(**IC8**).

Fusion par intersections partielles La révision par intersections partielles a été étendue à la fusion [47]. Cette approche repose sur les ensembles α-restants, i. e. les sous-ensembles maximaux de K qui n'impliquent pas α [1]. On note $K \perp\!\!\!\perp \alpha$ l'ensemble des ensembles α-restants de K et on note $K \perp\!\!\!\perp \perp$ l'ensemble des sous-ensembles maximaux cohérents (ensembles $\perp$-restants) de K. La définition d'un opérateur de fusion par intersections partielles nécessite la définition d'une fonction de sélection générale.

Définition 3 *Une fonction de sélection générale pour $\mathcal{L}$ est une fonction γ (γ: $2^{2^{\mathcal{L}}} \rightarrow 2^{2^{\mathcal{L}}}$) telle que pour tout $X \subseteq \mathcal{L}$: (1) $\gamma(X \perp\!\!\!\perp \perp) \subseteq X \perp\!\!\!\perp \perp$ et (2) $\gamma(X \perp\!\!\!\perp \perp) \neq \emptyset$.*

Soit $X \perp\!\!\!\perp \perp$ un ensemble de sous-ensembles minimaux incohérents d'un ensemble de formules X.

Définition 4 *Soit γ une fonction de sélection générale, γ est une* fonction de sélection équitable *si pour tout X, $X' \subseteq \mathcal{L}$, $X \perp\!\!\!\perp \perp = X' \perp\!\!\!\perp \perp$ implique que $X \setminus \bigcap_{\gamma}(\gamma(X \underline{\perp} \perp)) = X' \setminus \bigcap_{\gamma}(\gamma(X' \underline{\perp} \perp))$.*

L'intuition sous-jacente à fonction de sélection équitable est que si deux ensembles de formules ont le même ensemble de sous-ensembles minimaux incohérents, alors une formule est retirée dans une sélection de $\perp$-restants de X si et seulement si cette formule est retirée dans une sélection de $\perp$-restants de X'. La fusion par intersections partielles est alors définie comme suit [44].

Définition 5 *Soit K et A deux bases de croyances et γ une fonction de sélection équitable, l'opérateur $\triangle_{\gamma}$ de fusion par intersections partielles ($\triangle_{\gamma}$: $2^{\mathcal{L}} \times 2^{\mathcal{L}} \rightarrow 2^{\mathcal{L}}$) est défini par $K \triangle_{\gamma} A = \bigcap \gamma((K \cup A) \underline{\perp} \perp)$.*

Tout opérateur de fusion par intersections partielles satisfait les postulats *Inclusion*, *Cohérence forte*, *Pertinence forte*et *Congruence* [47].

Un point de vue dual, est de considérer les sous-ensembles minimaux incohérents de sous-ensembles de formules, et d'enlever au moins une formule dans chaque sous-ensemble minimal incohérent. Suivant ce point de vue, Falappa et al. ont proposé un opérateur de fusion par noyau [44] et Hué et al ont proposé la fusion par r-ensembles [56].

Fusion par noyau La notion de α-noyau de K (sous-ensemble minimal de K impliquant α) a été introduite initialement par Hansson pour la définition de la contraction par noyau [52]. La fusion par noyau nécessite la définition de $\perp$-noyaux de $K \cup A$, i. e. sous-ensembles minimaux incohérents de $K \cup A$. Plus formellement,

Définition 6 *Soit K et A deux bases de croyances, $(K \cup A) \perp\!\!\!\perp \perp$ est l'ensemble tel que $X' \in (K \cup A) \perp\!\!\!\perp \perp$ si et seulement si $X' \subseteq K \cup A$, X' est incohérent et si $X'' \subset X'$ alors X'' est cohérent.*

La définition d'un opérateur de fusion par noyau requiert la définition d'une fonction d'incision qui sélectionne les formules à retirer de $(K \cup A)$ afin de restaurer la cohérence.

Définition 7 *Soit K et A deux bases de croyances, une fonction d'incision générale pour K et A est une fonction σ (σ: $2^{2^{\mathcal{L}}} \rightarrow 2^{\mathcal{L}}$) telle que pour tout K et A: (1) $\sigma((K \cup A) \perp\!\!\!\perp \perp) \subset \bigcup(((K \cup A) \perp\!\!\!\perp \perp)$ et (2) si $X \in (K \cup A) \perp\!\!\!\perp \perp$ et $X \neq \emptyset$ alors $(X \cap \sigma((K \cup A) \perp\!\!\!\perp \perp)) \neq \emptyset$.*

La fusion par noyau est alors définie comme suit.

Définition 8 *Soit K et A deux bases de croyances, et σ une fonction d'incision générale, l'opérateur $\triangle_\sigma$ de fusion par noyau ($\triangle_\sigma$: $2^{\mathcal{L}} \times 2^{\mathcal{L}} \rightarrow 2^{\mathcal{L}}$) est définie par $K \triangle_\sigma A = (K \cup A) \backslash \sigma((K \cup A) \perp\!\!\perp \perp)$.*

Par ailleurs tout opérateur de fusion par noyau satisfait les postulats *Inclusion*, *Cohérence forte*, *Symétrie*, *Vacuité*, *Reversion* et *Conservation essentielle globale* [44]. Les liens entre les différents postulats permettent de montrer que tout opérateur de fusion par intersections partielles est un opérateur de fusion par noyau [44].

Fusion par r-ensembles L'idée centrale de l'approche des r-ensembles consiste à identifier, puis à retirer, un sous-ensemble adéquat de formules dans l'union des bases de croyances afin de restaurer la cohérence, tout en respectant les contraintes. Dans un premier temps, l'ensemble des sous-ensembles de formules est considéré avant d'y effectuer une sélection grâce à l'une des stratégies, $Card$ pour la révision mais également Σ, Max, $GMax$ pour la fusion.

Tous les opérateurs de fusion décrits ici s'appuient sur la notion commune de r-ensemble, qui est un ensemble minimal de formules à retirer dans les bases de croyances K_i pour rétablir la cohérence en respectant une certaine stratégie de choix des règles à retirer P. Plus formellement, cette notion est définie comme suit.

Définition 9 (r-ensemble potentiel) *Soient $E = \{K_1, \ldots, K_n\}$ un profil de croyances, IC l'ensemble des contraintes d'intégrité, et $X \subseteq \bigcup E$. On dit que X est un r-ensemble potentiel de E contraint par IC si et seulement si $(\bigcup E \backslash X) \cup IC$ est cohérent.*

Les r-ensembles potentiels retirent au moins une formule dans chaque sous-ensemble minimal incohérent de $(\bigcup E) \cup IC$. On note $\mathcal{PR}_{IC}(E)$ la collection de r-ensembles potentiels de E contraints par IC. Lorsque $(\bigcup E) \cup IC$ est cohérent alors $\mathcal{PR}_{IC}(E) = \emptyset$.

Dans le pire des cas, le nombre de r-ensembles potentiels d'un profil est exponentiel par rapport aux nombre de formules. De plus, retirer arbitrairement un r-ensemble potentiel pourrait conduire à des retraits inutiles de certaines croyances qui ne sont pas impliquées dans l'incohérence de $(\bigcup E) \cup IC$. C'est la raison pour laquelle on considère d'abord les r-ensembles potentiels qui sont minimaux par rapport à l'inclusion ensembliste. Ces r-ensembles potentiels ne retirent qu'une seule formule dans chaque sous-ensemble minimal incohérent de $(\bigcup E) \cup IC$. De plus, afin de tenir compte de l'origine des croyances d'autres critères de minimisation sont définis et un pré-ordre total sur $\mathcal{PR}_{IC}(E)$ code ces critères qui reflète la stratégie de fusion.

Définition 10 *Soit P une stratégie de fusion et soit X, Y deux r-ensembles potentiels de E contraints par IC, le pré-ordre total $\leq_P$ est défini par $X \leq_P Y$ si et seulement si X et Y sont minimaux par rapport à l'inclusion ensembliste et si X is préféré à Y.*

Définition 11 (r-ensemble) *Soient* $E = \{K_1, \ldots, K_n\}$ *un profil de croyances et* $X \subseteq \bigcup E$. *On dit que* X *est un r-ensemble de* E *pour la stratégie* P *si et seulement si i)* $X \in \mathcal{PR}_{IC}(E)$*; ii)* $\forall X' \subseteq \bigcup E$ *si* $X' \subseteq X$ *alors* $(\bigcup E \backslash X') \cup IC$ *est incohérent; iii)* $\nexists X' \subseteq \bigcup E$ *tel que* $X' <_P X$.

La collection des r-ensembles du profil E contraint par IC pour la stratégie P est notée $\mathcal{R}_{P,IC}(E)$.

L'approches des r-ensembles nécessite d'abord de calculer les r-ensembles puis d'en sélectionner un ou plusieurs selon une fonction de sélection s. Pour simplifier la lecture et sans perte de généralité, on considère désormais s telle que $s(\mathcal{R}_{P,IC}(E)) = \mathcal{R}_{P,IC}(E)$.

La fusion par r-ensembles ou RSF (abréviation de Removed Set Fusion en anglais), est une opération de $2^{\mathcal{L}} \times \cdots \times 2^{\mathcal{L}}$ vers $2^{\mathcal{L}} \times \cdots \times 2^{\mathcal{L}}$ définie comme suit.

Définition 12 (fusion) *Soient un profil de croyances* E*, un ensemble de contraintes d'intégrité* IC *et une stratégie de fusion* P*. Le résultat de la fusion par r-ensembles de* E *contraint par* IC *d'après la stratégie* P*, noté* $\Delta^{RSF}_{P,IC}$ *est défini par* $\Delta^{RSF}_{P,IC}(E) = \{((\bigcup E) \backslash X) \cup IC \ : \ X \in \mathcal{R}_{P,IC}(E)\}$.

Les différentes stratégies étudiées dans le cadre de la fusion par r-ensembles sont décrites comme suit. Soient X et Y deux r-ensembles potentiels :

$\boldsymbol{\Sigma}$ **:** $X \leq_\Sigma Y$ si et seulement si $\sum_{1 \leq i \leq n} |X \cap K_i| \leq \sum_{1 \leq i \leq n} |Y \cap K_i|$.

Card **:** $X \leq_{Card} Y$ si et seulement si $|X \cap (\cup E)| \leq |Y \cap (\cup E)|$,
où $(\cup E)$, représente l'union des bases de croyances de E, permettant ainsi de ne plus prendre en compte la répétition éventuelle de certaines formules d'une base à l'autre.

Max **:** $X \leq_{Max} Y$ si et seulement si $\max_{1 \leq i \leq n} |X \cap K_i| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |Y \cap K_i|$.

GMax **:** $X \leq_{GMax} Y$ si et seulement si $L^E_X \leq_{lex} L^E_Y$,
où L^E_X est la séquence $(|X \cap K_1|, \ldots, |X \cap K_n|)$ triée par ordre décroissant.

Les opérateurs syntaxiques décrits précédemment permettent de prendre en compte les bases incohérentes, mais ne tiennent pas compte de la distribution des informations. En revanche, les opérateurs de fusion par r-ensembles permettent d'éviter ces deux écueils, de plus une implantation efficace utilisant la programmation logique par ensembles de réponses (Answer Set Programming) est proposée.

Concernant les postulats IC pour toute strategie P, $\Delta^{RSF}_{P,IC}$ satisfait **(IC0)**, **(IC1)**, **(IC2)**, **(IC7)**, **(C8)**. Pour les stratégies Σ, Max et $GMax$, $\Delta^{RSF}_{P,IC}$ satisfait **(IC5)** et pour les stratégies Σ et $GMax$ $\Delta^{RSF}_{P,IC}$ satisfait **(IC6)**.

Pour toute strategie P, $\Delta^{RSF}_{P,IC}$ satisfait *Symétrie*, *Cohérence forte*, *Vacuité* et *Conservation essentielle globale*. De plus pour les stratégies Σ et $Card$, $\Delta^{RSF}_{P,IC}$ satisfait également *Congruence* et *Reversion*.

les résultats obtenus sont équivalents à ceux obtenus par l'approche des sous-bases maximales cohérentes. En effet, $M \in MC(E, IC)$ si et seulement si $(\bigcup E) \backslash M$ est r-ensemble potentiel minimal par rapport à l'inclusion ensembliste et $M \in MC_{Card}(E, IC)$ si et seulement si $(\bigcup E) \backslash M$ r-ensemble potentiel minimal par rapport à la cardinalité. L'opérateur $\Delta^{C4}_{IC}(E)$ sélectionne les sous-ensembles maximaux selon la cardinalité et $\Delta^{RSF}_{Card,IC}(E) = \Delta^{C4}_{IC}(E)$. L'opérateur $\Delta^{\cap,\Sigma}_{\mu}(E)$ selectionne les sous-bases maximales cohérentes qui ont la plus grande intersection selon la cardinalité, avec les bases et $\Delta^{RSF}_{\Sigma,IC}(E) = \Delta^{\cap,\Sigma}_{IC}(E)$.

Par ailleurs, les liens entre RSF et les autres opérations de fusion sont les suivants. Lorsque l'on munit l'ensemble des fonctions de sélection équitables de pré-ordres totaux reflétant les stratégies de fusion de manière analogue aux pré-ordres totaux définis sur les r-ensembles potentiels minimaux selon l'inclusion ensembliste. on obtient les résultats suivants. X est un r-ensemble de $K \cup A$ selon une stratégie P si et seulement si il existe une fonction de sélection équitable $\gamma^\star$ telle que $X = (K \cup A) \backslash M$ où $\gamma^\star$ est maximale selon $<_P$. Le lien avec la fusion par intersections partielles est $\Delta^{RSF}_{P,IC}(K \cup A) = \{K \triangle_{\gamma^\star} A \;:\; \gamma^\star$ est maximale selon $<_P\}$.

De même, pour la fusion par noyau, lorsque l'on munit l'ensemble des fonctions générales d'incision de pré-ordres totaux reflétant les stratégies de fusion de manière analogue aux pré-ordres totaux définis sur les r-ensembles potentiels minimaux selon l'inclusion ensembliste, on obtient les résultats suivants. Pour toute fonction générale d'incision σ, $X = \sigma((K \cup A) \perp\!\!\!\perp \bot)$ est un r-ensemble potentiel de $(K \cup A)$. Et si X un est r-ensemble potentiel minimal selon l'inclusion ensembliste alors il existe une fonction générale d'incision σ telle que $X = \sigma((K \cup A) \perp\!\!\!\perp \bot)$. X est un r-ensemble de $K \cup A$ selon P si et seulement si il existe une fonction générale d'incision σ telle que $X = \sigma((K \cup A) \perp\!\!\!\perp \bot)$, où σ est minimale selon l'inclusion ensembliste et est minimale selon $<_P$. Le lien avec la fusion par noyau est $\Delta^{RSF}_{P,IC}(K \cup A) = \{K \triangle_\sigma A \;:\; \sigma$ est minimale selon l'inclusion ensembliste et est minimale selon to $<_P\}$.

3.3 Fusion prioritaire, fusion et révision itérée

Delgrande, Dubois et Lang [26] proposent un cadre formel qui relie révision itérée et fusion. L'idée est de fusionner un ensemble de formules[7] plus ou moins prioritaires, selon un ordre total strict de priorité reflétant leur importance. Ces auteurs motivent alors la généralité de leur approche en montrant que les opérateurs de fusion propositionnelle classiques (i.e. sur des bases non pondérées) et les opérateurs de révision itérée (à la Darwiche et Pearl) peuvent être considérés comme les deux cas extrêmes de ces opérateurs de fusion prioritaire. Cette discussion met l'accent sur le fait que dans un certain nombre d'articles portant sur la révision itérée, il semble que les auteurs confondent l'hypothèse d'informations de plus en plus fiables, avec celle d'informations de

[7] Chaque formule pouvant représenter une base si on veut faire le parallèle avec la fusion dans le cadre propositionnel.

plus en plus récentes.

Leur discussion sur les opérateurs de révision itérée rappelle les mises en garde de Friedman et Halpern sur les dangers de définir des opérateurs de changement sans spécifier leur ontologie [46]. L'argument principal est que si on fait l'hypothèse que les nouvelles informations qui arrivent successivement lors d'une suite de révisions concernent un monde statique (hypothèse usuelle), alors il n'y a a priori aucune raison de préférer la dernière. Si ces informations ont des fiabilités différentes, il est possible de représenter ces fiabilités explicitement, afin de les prendre correctement en compte dans le processus de révision si elles n'arrivent pas dans l'ordre de leur fiabilité. Et la façon correcte de faire est de réaliser leur fusion prioritaire.

Le cadre de Delgrande, Dubois et Lang suppose que l'on identifie un état épistémique avec la suite de formules que l'agent a reçues jusqu'ici, hypothèse qui avait été proposée dans la définition de révision itérée de Lehmann [68] et dans la proposition d'opérateurs à mémoire [67], [75]. Delgrande, Dubois et Lang montrent ensuite que les postulats des opérateurs de révision itérée peuvent être retrouvés à partir des postulats de base qu'ils proposent pour la fusion prioritaire. Ils montrent également que l'on obtient une partie des postulats de la fusion contrainte.

4 Approches valuées de la fusion

Il existe également des approches valuées de la fusion d'informations développées dans le cadre des théories de l'incertain, comme celles des probabilités ou des possibilités [35]. C'est d'ailleurs dans le cadre des probabilités que sont apparues les plus anciennes de ces méthodes. Elles supposent un ensemble de mondes possibles $\omega \in \mathcal{W}$ mutuellement exclusifs (qui correspondent aux interprétations dans les approches logiques des sections précédentes). Dans les cadres probabilistes et possibilistes, on associe à chaque monde possible un degré qui mesure à quel point ce monde correspond au monde réel. Ces degrés appartiennent à un ensemble de valeurs totalement ordonné, par exemple l'intervalle $[0, 1]$, ou encore l'ensemble des entiers naturels, vu soit comme une échelle ordinale, soit comme une échelle numérique :

- Dans la théorie des probabilités, la somme des degrés vaut 1 et $p(w) = 1$ signifie que ω est l'état du monde réel. Ceci implique que $p(\omega') = 0$, $\forall \omega' \neq \omega$ pour les autres mondes ω' considérés comme impossibles.

- Dans la théorie des possibilités [34], $\pi(\omega) = 0$ signifie que le monde ω est impossible, ne correspond pas à un état du monde réel. En revanche, contrairement à la théorie des probabilités, $\pi(\omega) = 1$ exprime seulement que rien n'empêche ω d'être le monde réel, et on suppose $\exists \omega, \pi(\omega) = 1$ pour assurer la cohérence. Ici, $\pi(\omega) = 1$ indique la totale plausibilité, ou le caractère non surprenant de ω. Dans le cadre qualitatif, la fonction π ne reflète qu'un ordre de plausibilité.

- Dans la théorie des fonctions de rang [8] de Spohn [85] $\kappa(\omega)$ est un entier naturel (plus généralement un ordinal) qui représente un degré d'impossibilité. L'échelle est renversée par rapport aux deux autres cadres : $\kappa(\omega) = 0$ indique l'absence totale de surprise que ω soit le monde réel, l'impossibilité du monde ω étant reflétée par $\kappa(\omega) = \infty$.

Ces trois formalismes sont reliés entre eux dans le cadre numérique. Spohn [86] interprète $\kappa(\omega)$ comme l'exposant d'une probabilité infinitésimale de la forme $p(\omega) = \epsilon^{\kappa(\omega)}$, et poser $\pi(\omega) = k^{-\kappa(\omega)}$ pour un entier $k > 1$ permet de retrouver le formalisme de la théorie des possibilités [38]. La loi d'additivité des probabilités $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si $A, B \subseteq \mathcal{W}, A \cap B \neq \emptyset$ se réduit à la loi des fonctions de rang $\kappa(A \cup B) = \min(\kappa(A), \kappa(B)), \forall A, B$, et donc $\kappa(A) = \min_{\omega \in A} \kappa(\omega)$. L'expression de cette loi en théorie des possibilités est $\Pi(A \cup B) = \max(\Pi(A), \Pi(B))$, avec $\Pi(A) = \max_{\omega \in A} \pi(\omega)$.

Dans un tout autre cadre, les théories des probabilités et possibilités numériques sont des cas particuliers de la théorie des fonctions de croyance et plus généralement de celle des probabilités imprécises. Dans ce cas une distribution de possibilité code un ensemble convexe de probabilités.

4.1 Fusion d'informations incertaines

Dans cette section on ne considèrera que les approches existantes pour la fusion d'informations incertaines. En effet la fusion de préférences est le sujet d'une large littérature sur la décision multicritère et la théorie du vote. Les plus anciennes méthodes de fusion d'informations incertaines sont une fois de plus probabilistes et datent des années 1960. Il y a deux approches, l'une Bayésienne l'autre pas. Plus récemment la théorie des fonctions de croyance propose essentiellement une opération de fusion originale mais qui a sa source dans les travaux de Bernoulli et Lambert au XVIIIème siècle. Enfin la théorie des possibilités propose une vision ensembliste de la fusion qui est compatible avec la vision des fonctions de croyance.

L'idée qu'il puisse avoir une règle unique de fusion d'informations incertaines semble illusoire. La façon de fusionner dépend du niveau de conflit entre les sources d'information, et d'hypothèses les concernant. On peut mettre au jour trois approches [36, 39]

- Une approche conjonctive qui consiste à recouper les informations. Elle présuppose que les sources sont fiables avec un niveau de conflit mutuel suffisamment bas.
- Une approche disjonctive qui ne prend pas parti et tolère le conflit au prix d'une perte d'informativité.
- Une approche par comptage qui s'apparente aux processus de vote, favorisant les informations prônées par le plus grand nombre de sources. Elle suppose que ces sources sont indépendantes et prévaut en statistique.

[8] dites aussi "fonctions conditionnelles ordinales" (OCF).

Dans le cas où les sources sont nombreuses, les deux premières approches échouent et la troisième apparaît comme un compromis entre elles. On peut aussi alors chercher des sous-groupes maximaux non-conflictuels de sources et combiner ainsi les approches conjonctives et disjonctives. Cette dernière approche est inspirée d'une approche logique due à Rescher et Manor [79]. Dans le cas de deux sources fournissant des informations incomplètes de la forme $\omega \in E_1$ et $\omega \in E_2$ cela correspond à la règle de fusion qui conclut $\omega \in E_1 \cap E_2$ si $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$ et $\omega \in E_1 \cup E_2$ sinon. Contrairement au cadre logique pour la fusion, il n'existe pas d'approche axiomatique des opérations de fusion numérique qui fasse l'unanimité. Walley[87] discute de nombreuses propriétés souhaitables dans un cadre très général: celui des probabilités imprécises. Oussalah [74] le fait pour la théorie des possibilités, et Smets [84] pour celle des fonctions de croyance.

Méthodes probabilistes L'approche Bayésienne de la fusion [48] suppose que chaque source i est caractérisée par sa fonction de vraisemblance $P_i(\mu_i|\omega)$ qui donne *sa* probabilité d'observer μ_i quand l'état réel est ω [9]. De plus on doit disposer d'une probabilité a priori sur l'état du monde $p(\omega)$. Dans le cas le plus simple, on suppose que les k sources sont indépendantes et fournissent les observations $\mu_1, \ldots, \mu_k$. La fusion fournit la probabilité a postériori de ω à l'aide de la règle de Bayes:

$$p(\omega|\mu_1, \ldots, \mu_k) = \frac{(\prod_{i=1}^{k} P_i(\mu_i|\omega)) \cdot p(\omega)}{\sum_{\omega' \in \mathcal{W}} (\prod_{i=1}^{k} P_i(\mu_i|\omega')) \cdot p(\omega')}$$

Cette approche se généralise pour des sources dépendantes à l'aide de réseaux Bayésiens. Elle est souvent utilisée quand les sources sont des capteurs.

Dans l'autre approche introduite pour la fusion d'opinions d'experts par Cooke [23], chaque source fournit une distribution de probabilité $p_i(\omega)$ sur l'état du monde, et on a pu évaluer son poids relatif α_i (sur la base de tests préliminaires). On adopte une approche par comptage (α_i pouvant être assimilé à un taux de réplication de l'information de la source i) qui consiste à calculer une distribution de probabilité consensuelle sous la forme $p_+(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i(w)$. Cette règle est la seule qui soit stable par projection dans le cas multidimensionnel.

Règles de fusion possibilistes Dans ce cadre, on suppose que chacune des k sources fournit une distribution de possibilité π_i sur les états possibles. On peut alors appliquer l'une des trois approches [36]:

- Avec l'approche conjonctive, on peut fusionner les distributions de possibilité à l'aide d'une t-norme t généralisant la conjonction logique : $\pi_t(\omega) = t(\pi_1(\omega), \ldots, \pi_k(\omega))$ (ces opérations sont associatives). La présence d'un

[9] Notons que les probabilités sont attachées aux sources.

conflit amène à renormaliser cette expression pour recouvrir une distribution de possibilité sous la forme:

$$\hat{\pi}_t(\omega) = \frac{t(\pi_1(\omega), \ldots, \pi_k(\omega))}{\max_{w' \in \mathcal{W}} t(\pi_1(\omega'), \ldots, \pi_k(\omega'))}$$

Notons que cette forme de fusion est idempotente si on choisit $t = \min$ (elle ne suppose donc pas l'indépendance des sources) mais qu'elle n'est pas associative. En revanche si on choisit le produit pour t, il y a effet de renforcement de la plausibilité des états consensuels pour les sources, ce qui suppose leur indépendance. Et l'opération est associative. C'est en fait l'opération de fusion utilisée jadis dans le système expert MYCIN, et elle est très proche de la règle de fusion Bayésienne, en assimilant les fonctions de vraisemblance à des distributions de possibilité.

- Si le conflit entre les sources est trop sévère (le dénominateur $\max_{w' \in \mathcal{W}} t(\pi_1(\omega), \pi_2(\omega))$ est trop faible), alors on peut utiliser une extension multivaluée de la disjonction (une t-conorme), telle que le maximum : $\pi_{\max}(\omega) = \max(\pi_1(\omega), \pi_2(\omega))$, qui suppose qu'une des sources soit fiable, sans préjuger de laquelle.
- L'approche par comptage opère une moyenne arithmétique pondérée des distributions de possibilité (tout comme sa variante probabiliste), suivie d'une renormalisation.

Ce cadre inclut le cas où on cherche à fusionner des intervalles d'imprécision pour une valeur inconnue. Des approches plus élaborées existent, utilisant soit une hypothèse sur le nombre de sources fiables [39], soit la disjonction de résultats partiels obtenus par fusion conjonctive des informations fournies par les sous-ensembles maximaux cohérents de sources [31].

Règle de Dempster en théorie des fonctions de croyance Supposons maintenant que les sources fournissent des fonctions de masse m_i sur $\mathcal{W}$ associées à des fonctions de croyance. La règle de combinaison de Dempster est une méthode conjonctive qui en un certain sens généralise la règle de fusion Bayésienne et procède comme suit. On la donne pour deux sources car elle est associative.

- Pour chaque paire d'ensembles focaux E et F (tels que $m_1(E) > 0, m_2(F) > 0$), on fait l'intersection $E \cap F$ si elle est non-vide, et on lui associe la masse $m_1(E)m_2(F)$.
- On normalise la fonction de masse ainsi obtenue pour que la somme des masses fasse 1.

Cette approche correspond à la formule:

$$\hat{m}(C) = \frac{\sum_{E \cap F = C} m_1(E) m_2(F)}{\sum_{E \cap F \neq \emptyset} m_1(E) m_2(F)}$$

La règle de fusion Bayésienne est retrouvée (sur deux sources) si on combine trois fonctions de masse $m_i, i = 1, 2, 3$, l'une d'entre elles étant une probabilité ($m_3(\{\omega\}) = p(\omega), \forall \omega \in \mathcal{W}$, et $m_3(E) = 0$ si E n'est pas un singleton). Dans ce cas, $\hat{m}$ coïncide avec la mesure de probabilité obtenue par la règle Bayésienne en posant $P(\mu_i|\omega) = \sum_{\omega \in E} m_i(E) = Pl_i(\omega)$. On retrouve la règle de conditionnement de Dempster si $m_2(E) = 1$ dans la règle de fusion ci-dessus, ce qui suggére de voir dans ce cadre la révision comme la fusion d'une information incertaine avec une information claire certainement vraie. Cette règle devient contestable si le terme de normalisation $\sum_{E \cap F \neq \emptyset} m_1(E)m_2(F)$ est trop petit, et non définie s'il est nul. D'autres règles non conjonctives doivent être utilisées, notamment en changeant le mode de normalisation (allouer le terme de renormalisation à la tautologie $\mathcal{W}$) ou en remplaçant la conjonction par la disjonction dans la règle de Dempster. De nombreuses variantes de ces modes de fusion sont recensées dans [37, 84].

4.2 Fusion sémantique de bases finies pondérées

Lorsque les informations contenues dans les bases logiques n'ont pas toutes la même importance, on peut utiliser des approches pondérées. L'approche la plus qualitative est de considérer, pour chaque source/agent, un ensemble de bases totalement pré-ordonnées en différentes strates, de la plus importante à la moins importante. Cette situation est habituellement codée en utilisant la logique possibiliste [34] ou les fonctions ordinales conditionnelles [85, 62]. Dans le cadre de la logique possibiliste, un profil $E = \{B_1, \cdots B_n\}$ est un ensemble de n bases possibilistes où chaque base est constituée d'un ensemble fini de formules pondérées de la forme (φ_j, a_j) avec $a_j \in [0, 1]$. La formule (φ_j, a_j) signifie que le degré de certitude (resp. priorité) associé à la croyance (resp. contrainte) représentée par φ_j est au moins a_j. Chaque base B_i permet d'induire une distribution de possibilité π_i sur les interprétations comme suit :

$$\pi_i(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \forall(\varphi_j, a_j) \in B_i,\ \omega \models \varphi_j; \\ 1 - \max\{a_j \mid (\varphi_j, a_j) \in B_i \text{ and } \omega \not\models \varphi_j\} & \text{sinon} \end{cases}$$

A chaque interprétation ω est associé un vecteur regroupant les degrés de possibilité associées à ω par chaque base du profil, noté $\nu_E(\omega) = (\pi_1(\omega), \cdots, \pi_n(\omega))$. L'intuition des approches sémantiques proposées pour la fusion de bases possibilistes est d'agréger les composantes de ce vecteur afin d'obtenir une distribution de possibilité unique, notée π_E. En voyant la distribution de possibilité comme le codage d'une affectation fidèle, on peut reconduire dans ce cadre les propriétés des affectations syncrétiques au sens de la section 3, par exemple:

$\forall \omega \in \mathcal{W},$ si $\forall B_i \in E,\ \pi_i(\omega) = 1$ alors $\pi_E(\omega) = 1$ (propriété **(1)**);

$\forall \omega, \omega' \in \mathcal{W},$ si $\forall B_i \in E,\ \pi_i(\omega) \geq \pi_i(\omega')$ alors $\pi_E(\omega) \geq \pi_E(\omega')$ (propriété **(5)**).

D'autres propriétés peuvent être demandées par exemple l'associativité, que l'on utilise beaucoup dans les approches numériques de fusion. On peut aussi utiliser la classification des opérations de fusion rappelée ci-dessus. En particulier, les opérateurs *conjonctifs* ne considèrent plausibles que les interprétations plausibles au sens de toutes les sources (supposées fiables) et les opérateurs *disjonctifs* considèrent plausible toute interprétation plausible au sens d'au moins une source (au moins une source est supposée fiable). Benferhat, Dubois, Kaci et Prade [59, 9] ont étudié plusieurs opérateurs de fusion de ce type. Ils ont ensuite étudié l'extension des propriétés logiques de la fusion dans ce cadre [11].

La question principale est de savoir coder une opération d'agrégation de distributions de possibilité définies sur les interprétations par une agrégation syntaxique de bases pondérées. Par exemple appliquer l'opération conjonctive de minimum entre des distributions de possibilité revient à faire l'union des bases pondérées associées. Voir [9] pour le codage syntaxique d'autres opérations.

Notons qu'agréger des distributions de possibilité et agréger des distances sont deux démarches similaires. On peut arguer que l'approche logique KP de la section 3 utilise implicitement des bases ordonnées (induites par les affectations fidèles et les syncrétiques) et qu'en pratique elle utilise une opération d'agrégation numérique possibiliste par le biais des distances. Les approches KP et possibilistes sont donc compatibles. La différence majeure est que le résultat de la fusion dans l'approche KP est une base classique, à savoir la strate la plus certaine du résultat de la fusion de bases pondérées. On sait alors que l'associativité d'une opération de fusion de bases pondérées construites à partir de bases classiques à l'aide d'une distance ne s'étend pas à l'opération de fusion sémantique de bases classiques correspondante [9].

D'autres approches de la fusion de bases logiques pondérées dans le cadre possibiliste ont été proposées [76] et récemment une étude comparative des différents opérateurs de fusion possibiliste a été proposée dans [77]. Dans le cadre des fonctions de rang de Spohn, Meyer a également défini différents opérateurs de combinaison [73]. Sans surprise, certains d'entre eux sont la traduction des opérateurs de fusion à base de modèles usuels dans ce cadre pondéré, mais d'autres semblent très loin de ce que l'on attend d'un opérateur de fusion. Par ailleurs, la réversibilité des opérateurs de fusion usuels de bases pondérées a été obtenue par un codage adéquat de la pondération par des polynômes [58].

Tous ces travaux utilisant des bases pondérées, explicitement ou implicitement reviennent sémantiquement à fusionner des distances, des entiers, ou des degrés de possibilité. Il se pose alors un problème de comparaison intersource de ces valeurs (numériques ou ordinales), c'est-à-dire que l'opération d'agrégation utilisée suppose que l'échelle de valeur utilisée pour une base a le même sens que celle utilisée pour n'importe quel autre base. C'est ce que l'on appelle l'hypothèse de commensurabilité. Cette hypothèse est parfaitement naturelle, par exemple si les sources sont des capteurs identiques. Mais dans des applications où les sources sont des agents autonomes, cette hypothèse semble plus discutable. En particulier, lorsque l'on travaille avec des bases pondérées exprimant des préférences plutôt que des plausibilités, on est très proche des hypothèses faites en théorie du choix social pour les méthodes de vote. Et il est communément admis que cette hypothèse de commensurabilité n'est pas acceptable dans ce cas [4]. Dans le cadre du vote seule la préférence ordinale de chaque agent est prise en compte, c'est-à-dire l'ordre associé à ces nombres. L'étude générale, sans cette hypothèse de commensurabilité, de la fusion de bases pondérées, surtout si on considère des opérateurs majoritaires, peut tirer parti des méthodes de vote, et il faut alors se référer à la littérature sur le choix social [4, 5]. Maynard-Zhang et Lehmann [72] ont étudié la fusion de croyances ordinales conflictuelles, en relâchant l'hypothèse d'ordre total. Plus récemment, Benferhat, Lagrue et Rossit [12, 13]ont proposé des opérateurs de fusion de bases logiques pondérées non majoritaires sans l'hypothèse de commensurabilité. Evidemment, cela conduit a des opérateurs beaucoup plus prudents que ceux que l'on définit dans le cas commensurable. Une question intéressante serait alors d'étudier si les opérateurs proposés dans le cadre non commensurable correspondent à des méthodes de vote connues.

5 Fusion dans d'autres cadres logiques

La fusion a également été étudiée dans d'autres cadres de représentation que celui de la logique propositionnelle. On peut avoir besoin de fusionner des informations plus structurées que celles que l'on exprime en logique classique, ce qui génère des problèmes, et des possibilités, supplémentaires. Nous présentons un bref aperçu de ces travaux.

Fusion en logique du premier ordre Lang et Bloch [17] ont proposé des opérateurs de fusion à base de modèle $\Delta^{d,\max}$, utilisant le maximum comme fonction d'agrégation, grâce à un processus de dilatation. On peut d'ailleurs noter que l'opérateur de révision dans l'article de Dalal [25], n'est pas défini à base de distance, mais à partir d'une telle fonction de dilatation. Gorogiannis et Hunter [50] ont étendu cette approche afin de définir les opérateurs de fusion à base de modèles usuels, à savoir non seulement $\Delta^{d,\max}$, mais aussi $\Delta^{d,\Sigma}$, $\Delta^{d,Gmax}$, et $\Delta^{d,Gmin}$, en terme de dilatations.

L'intérêt de cette caractérisation est que celle-ci peut-être exportée à la logique du premier ordre. En effet, la définition usuelle des opérateurs à base de modèles demande le calcul de distances entre l'ensemble des interprétations. Or dès que l'on passe à des logiques plus expressives que la logique propositionnelle, comme la logique du premier ordre, cette méthode n'est plus utilisable. L'intérêt de la définition en termes de dilatation est que celle-ci peut-être calculée même dans ces cadres. Cela nécessite simplement de choisir la bonne fonction de dilatation. Voir [50] pour une discussion et quelques exemples sur ces fonctions de dilatation dans le cadre de la logique du premier ordre.

Opérateurs à base de défauts Delgrande et Schaub [28] ont proposé deux opérateurs de fusion à base de défauts. L'idée est d'utiliser un langage spécifique pour chaque base, afin d'assurer que l'union de ces bases soit cohérente, et ensuite d'ajouter autant de règles de défaut que possible afin d'identifier les variables correspondantes dans les différents langages (ce qui rappelle l'approche de Besnard et Schaub [15] pour l'inférence en présence d'incohérence).

Une critique que l'on peut adresser à cette approche est que, tout comme les opérateurs à base de formules, ces opérateurs ne tiennent pas compte de la distribution des informations parmi les sources. En particulier ils ne sont pas majoritaires, et une information qui serait crue par toutes les bases sauf une ne sera pas forcément retenue dans le résultat. Mais, comme pour les opérateurs à base de formules, il nous semble possible de définir des politiques additionnelles afin de prendre ce type d'arguments en compte en utilisant des fonctions de sélection sur les sous-ensembles maximaux équivalents.

Besnard, Gregoire et Ramon [14] ont également proposé une approche pour la fusion de théories de défauts. Il s'agit de déterminer les sous-ensembles minimaux instatisfaisables (MUSes) et de remplacer chaque formule d'un MUS par un défaut supernormal conduisant à plusieurs extensions. Lorsque l'ensemble de défauts est vide, cette approche correspond à la fusion de bases propositionnelles.

Fusion de programmes logiques Certains travaux ont étudié des opérateurs de fusion pour des bases exprimées en programmation logique avec sémantique des modèles stables (*Answer Set Programming*). C'est une question assez naturelle lorsque l'on considère qu'il y a eu beaucoup de travaux sur la révision / mise à jour de programmes logiques (voir par exemple [90, 3, 2, 29]), mais jusqu'à récemment aucun sur la fusion.

L'approche de Hué, Papini et Würbel [57] étend celle des r-ensembles aux programmes logiques et repose sur la suppression d'un certain nombre de formules dans l'union des bases, obtenues grâce à une fonction de sélection.

Delgrande, Schaub, Tompits et Woltran [30] ont également étudié la fusion dans ce cadre. Leurs opérateurs sont basés sur la définition d'une distance entre les modèles stables. Leurs opérateurs satisfont beaucoup plus de propriétés logiques.

Pour comparer rapidement ces deux approches, on peut dire que dans le cadre de la programmation logique, les opérateurs de Hué, Papini et Würbel correspondent aux approches à base de formules, alors que les opérateurs de Delgrande, Schaub, Tompits et Woltran correspondent aux approches à base de modèles. Il n'est donc pas étonnant que cette approche satisfasse, comme dans le cas de la logique propositionnelle, plus de postulats pour la fusion que l'approche syntaxique des r-ensembles.

Opérateurs à base de similarité Récemment Schockaert et Prade [82] ont proposé des opérateurs de fusion basés sur une relation de similarité qualitative sur les variables propositionnelles: pour chaque variable propositionnelle, on a donc un pré-ordre partiel sur les variables, dont cette variable est l'unique minimum. Deux variables peuvent évidemment ne pas être en relation, d'où le pré-ordre *partiel*. Cette relation peut-être extraite d'un graphe entre variables propositionnelles où la similarité entre deux variables se compte en nombre d'arcs parcourus. Schockaert et Prade se servent alors de cette relation de similarité pour tenter de trouver les meilleurs compromis lors de la fusion. La justification est alors de supposer que le conflit n'est pas issu d'avis divergents (donc d'un conflit réel), mais en quelque sorte de problèmes d'ontologie, ou d'approximations, par exemple, un agent qui ne fait pas de distinction entre deux concepts voisins. L'utilisation d'une telle relation de similarité permet d'envisager des techniques plus fines pour la résolution de conflit, qui ont des points communs avec les techniques employées pour la fusion de systèmes de contrainte.

Fusion de réseaux de contraintes Condotta, Kaci, Marquis et Schwind [22, 21] ont proposé des méthodes pour fusionner des réseaux de contraintes qualitatives. Ces méthodes peuvent être très utiles quand ces réseaux représentent des régions spatiales; par exemple dans le cadre de systèmes d'information géographiques (SIG), il peut être nécessaire de tenter de fusionner des bases de données spatiales issues de sources différentes.

Les conflits qui apparaissent sont plus subtils que ceux issus de problèmes exprimés en logique propositionnelle. Dans ce dernier cas, les conflits sont de type vrai/faux, alors que dans le cas des réseaux de contraintes on peut avoir différents types de conflits plus ou moins graves. Cette intensité que l'on sent naître entre les différents conflits permet d'imaginer des politiques de fusion plus variées que dans le cadre propositionnel.

Fusion de systèmes d'argumentation Beaucoup de travaux ont étudié l'argumentation comme moyen de raisonner à partir d'informations contradictoires. Fondamentalement on utilise un ensemble d'arguments et une relation de contrariété (attaque) entre les arguments. Un cadre général pour l'argumentation a été proposé par Dung [40]. Mais ces travaux sur l'argumentation ne se préoccupent que d'un seul agent. Dans [24] il a été étudié comment généraliser ces cadres pour prendre en compte le fait que les arguments sont distribués parmi un ensemble d'agents. Un des problèmes est que différents agents puissent avoir des systèmes d'argumentation construits à partir d'arguments différents. Il faut donc représenter ces systèmes d'argumentation pour pouvoir les comparer, et les fusionner, afin de déterminer les arguments acceptables pour le groupe.

6 conclusion

Le changement de croyances est un thème très actif en intelligence artificielle. qui a donné lieu à de nombreux travaux. La plupart des travaux sur la révision et la fusion ont été développés dans le cadre de la logique propositionnelle ou possibiliste et la théorie des probabilités.

L'extension de la révision et de la fusion dans d'autres contextes semble être une voie prometteuse, comme par exemple le contexte du web sémantique, où les connaissances génériques sont représentées par des ontologies traduites en logiques de description. L'abandon de l'hypothèse de commensurabilité est certainement une voie intéressante à explorer suite aux travaux sur la fusion de bases de croyances partiellement pré-ordonnées [12, 13].

Malgré l'intérêt croissant pour le changement de croyances, peu d'implantations sont disponibles pour l'approche logique. Ceci peut s'expliquer, en partie, par la complexité algorithmique des problèmes de décision associés au changement de croyances qui se situe généralement au deuxième niveau de la hiérarchie polynomiale ou au delà [69, 41, 63]. Cependant, dans certains cas, l'utilisation d'heuristiques et de structures de données appropriées permet d'obtenir une complexité pratique moyenne raisonnable pour des problèmes qui sont intraitables en général. Pour la mise en œuvre d'opérations de révision on peut citer, par exemple, pour les transmutations [88], pour la révision possibiliste [10], pour la révision par r-ensembles [89, 8]. Pour la mise en œuvre de la fusion on peut citer, par exemple pour les opérations de fusion définies par [17] la mise en œuvre reposant sur les diagrammes de décision binaires [49], pour la fusion à base de défauts la plate-forme COBA [27], et pour la fusion par r-ensembles [55] celle basée sur la programmation logique avec sémantique de modèles stables [56]. Toutes ces mises en œuvre ont été implantées mais la comparaison reste difficile en l'absence de benchmarks, aussi la construction d'un ensemble de benchmarks dans le même esprit de ceux utilisés pour le problème SAT pourrait, dans l'avenir, s'avérer fort utile.

References

[1] C. E. Alchourrón, P. Gärdenfors, and D. Makinson. On the logic of theory change: Partial meet contraction and revision functions. *Journal of Symbolic Logic*, 50:510–530, 1985.

[2] J. Alferes, J. Alexandre Leite, L. Moniz Pereira, H. Przymusinska, and T. C. Przymusinski. Dynamic updates of non-monotonic knowledge bases. *Journal of Logic Programming*, 45(1-3):43–70, 2000.

[3] M. Halfeld Ferrari Alves, D. Laurent, and N. Spyratos. Update rules in datalog programs. *Journal of Logic and Computation*, 8(6):745–775, 1998.

[4] K. J. Arrow. *Social choice and individual values.* Wiley, New York, seconde edition, 1963.

[5] K.J. Arrow, A. K. Sen, and K. Suzumura, editors. *Handbook of Social Choice and Welfare*, volume 1. North-Holland, 2002.

[6] C. Baral, S. Kraus, and J. Minker. Combining multiple knowledge bases. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 3(2):208–220, 1991.

[7] C. Baral, S. Kraus, J. Minker, and V. S. Subrahmanian. Combining knowledge bases consisting of first-order theories. *Computational Intelligence*, 8(1):45–71, 1992.

[8] S. Benferhat, J. Ben-Naim, O. Papini, and E. Würbel. An answer set programming encoding of prioritized removed sets revision: application to GIS. *Applied Intelligence*, 32(1):60–87, 2010.

[9] S. Benferhat, D. Dubois, S. Kaci, and H. Prade. Possibilistic merging and distance-based fusion of propositional information. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 34(1-3):217–252, 2002.

[10] S. Benferhat, D. Dubois, and H. Prade. A computational model for belief change and fusing ordered belief bases. In H. Rott and M. A. Williams, editors, *Frontiers in Belief revision*, pages 109–134. Kluwer, 2001.

[11] S. Benferhat and S. Kaci. Fusion of possibilistic knowledge bases from a postulate point of view. *Int. J. of Approximate Reasoning*, 33(3):255–285, 2003.

[12] S. Benferhat, S. Lagrue, and J. Rossit. An egalitarist fusion of incommensurable ranked belief bases under constraints. In *Proc. of National Conf. on Artificial Intelligence (AAAI'07)*, pages 367–372, 2007.

[13] S. Benferhat, S. Lagrue, and J. Rossit. An analysis of sum-based incommensurable belief base merging. In *Proc. of Conf. on Scalable Uncertainty Management (SUM'08)*, volume 5785 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 55–67. Springer, 2009.

[14] P. Besnard, E. Gregoire, and S. Ramon. A default logic patch for default logic. In *Proc. of Europ. Conf. On Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning under Uncertainty (ECSQARU'09)*, volume 5590 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 578–589. Springer, 2009.

[15] P. Besnard and T. Schaub. A simple signed system for paraconsistent reasoning. In J. J. Alferes, L. Moniz Pereira, and E. Orlowska, editors, *Proccedings of the European Workshop on Logics in Artificial Intelligence (JELIA'96)*, volume 1126 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 404–416. Springer, 1996.

[16] I. Bloch. Information combination operators for data fusion : A comparative review with classification. *IEEE Trans. on Syst., Man, and Cybern. A*, 26(1):52–67, January 1996.

[17] I. Bloch and J. Lang. Towards mathematical morpho-logics. In B. Bouchon-Meunier, J. Gutierrez-Rios, L. Magdalena, and R.R.Yager, editors, *Technologies for Constructing Intelligent systems*, volume 2, pages 367–380. Physica-Verlag GmbH, Heidelberg, Germany, Germany, 2002.

[18] J. L. Chacón and R. Pino Pérez. Merging operators: Beyond the finite case. *Information Fusion*, 7(1):41–60, 2006.

[19] L. Cholvy. Reasoning about merged information. In D. Dubois and H. Prade, editors, *Belief Change*, volume 3 of *Handbook of Defeasible Reasoning and Uncertainty Management Systems*, pages 233–263. Kluwer, Dordrecht, Pays-Bas, 1998.

[20] L. Cholvy and T. Hunter. Fusion in logic: a brief overview. In *Proc. of Europ. Conf. On Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning under Uncertainty (ECSQARU'97)*, volume 1244 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 86–95. Springer, 1997.

[21] J.-F. Condotta, S. Kaci, P. Marquis, and N. Schwind. Merging qualitative constraint networks in a piecewise fashion. In *Proc. of Int. Conf. on Tools for Artificial Intelligence (ICTAI'09)*, pages 605–608. IEEE Computer Society, 2009.

[22] J.-F. Condotta, S. Kaci, P. Marquis, and N. Schwind. Merging qualitative constraints networks using propositional logic. In *10th European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty (ECSQARU'09)*, volume 5590 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 347–358. Springer, 2009.

[23] R. M. Cooke. *Experts in Uncertainty*. Oxford University Press, Oxford, UK, 1991.

[24] S. Coste-Marquis, C. Devred, S. Konieczny, M.-C. Lagasquie-Schiex, and P. Marquis. On the merging of Dung's argumentation systems. *Artificial Intelligence*, 171:740–753, 2007.

[25] M. Dalal. Investigations into a theory of knowledge base revision: preliminary report. In *Proc. of National Conf. on Artificial Intelligence (AAAI'88)*, pages 475–479, 1988.

[26] J. P. Delgrande, D. Dubois, and J. Lang. Iterated revision as prioritized merging. In *Proc. of Int. Conf. on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'06)*, pages 210–220, 2006.

[27] J. P. Delgrande, D.H. Liu, T. Schaub, and Sven Thiele. COBA 2.0: A consistency-based belief change system. In *Proc. of Europ. Conf. On Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning under Uncertainty (ECSQARU'07)*, volume 4724 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 78–90. Springer, 2007.

[28] J. P. Delgrande and T. Schaub. A consistency-based framework for merging knowledge bases. *Journal of Applied Logic*, 5(3):459–477, 2007.

[29] J. P. Delgrande, T. Schaub, H. Tompits, and S. Woltran. Belief revision of logic programs under answer set semantics. In *Proc. of Int. Conf. on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'08)*, pages 411–421, 2008.

[30] J. P. Delgrande, T. Schaub, H. Tompits, and S. Woltran. Merging logic programs under answer set semantics. In *Proc. of Int. Conf. on Logic Programmping (ICLP'09)*, volume 5649 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 160–174. Springer, 2009.

[31] Sébastien Destercke, Didier Dubois, and Eric Chojnacki. Possibilistic information fusion using maximal coherent subsets. *IEEE T. Fuzzy Systems*, 17(1):79–92, 2009.

[32] D. Dubois. Information Fusion and Revision in Qualitative and Quantitative Settings. Steps Towards a Unified Framework . In W. Liu, editor, *European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty (ECSQARU), Belfast*, volume LNAI 6717, pages 1–18, Berlin, 2011. Springer.

[33] D. Dubois, P. Everaere, S. Konieczny, and O. Papini. *Approches de la révision et de la fusion d'informations, chapitre 11. Panorama de l'Intelligence Artificielle*, volume 1. Cepadues. A paraitre, 2013.

[34] D. Dubois, J. Lang, and H. Prade. Possibilistic logic. In D. M. Gabbay, C. J. Hogger, and J. A. Robinson, editors, *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*, volume 3 : Nonmonotonic Reasoning and Uncertain Reasoning. Oxford Science Publications, 1994.

[35] D. Dubois, S. Moral, and H. Prade. Belief change rules in ordinal and numerical uncertainty theories. In D. Dubois and H. Prade, editors, *Belief Change*, pages 311–392. Kluwer, Dordrecht, Pays-Bas, 1998.

[36] D. Dubois and H. Prade. Une approche ensembliste de la combinaison d'informations imprécises ou incertaines. *Revue d'Intelligence Artificielle*, 1:23–42, 1987.

[37] D. Dubois and H. Prade. Representation and combination of uncertainty with belief functions and possibility measures. *Computational Intelligence*, 4:244–264, 1988.

[38] D. Dubois and H. Prade. Epistemic entrenchment and possibilistic logic. *Artificial Intelligence*, 50:223–239, 1991.

[39] D. Dubois and H. Prade. La fusion d'informations imprécises. *Traitement du Signal*, 11:447–458, 1995.

[40] P. M. Dung. On the acceptability of arguments and its fundamental role in nonmonotonic reasoning, logic programming and n-person games. *Artificial Intelligence*, 77:321–357, 1995.

[41] T. Eiter and G. Gottlob. On the complexity of propositional knowledge base revision , updates, and counterfactuals. *Artificial Intelligence*, 57(2-3):227, 270 1992.

[42] P. Everaere, S. Konieczny, and P. Marquis. Conflict-based merging operators. In *Proc. of Int. Conf. on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'08)*, pages 348–357, 2008.

[43] R. Fagin, G. M. Kuper, J. D. Ullman, and M. Y. Vardi. Updating logical databases. In *Proc. of ACR'86*, pages 1–18, 1986.

[44] M. A. Falappa, G. Kern-Isberner, M. D. L. Reis, and G. R. Simari. Prioritized and non-prioritized multiple change on belief bases. *Journal of Philosophical Logic*, 41:77–113, 2012.

[45] M. A. Falappa, G. Kern-Isberner, and G. R. Simari. Explanations, belief revision and defeasible reasoning. *Artif. Intell.*, 141(1/2):1–28, 2002.

[46] N. Friedman and J.Y. Halpern. Belief revision: a critique. In *Proc. of Int. Conf. on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'96)*, pages 421–431, 1996.

[47] A. Fuhrmann. *An essay on contraction*. CSLI Publications, Stanford. California, 1997.

[48] C. Genest and J.V. Zidek. Combining probability distributions: A critique and an annoted bibliography. *Statistical Science*, 1(1):114–135, February 1986.

[49] N. Gorogiannis and A. Hunter. Implementing semantic merging operators using binary decision diagrams. *Int. J. of Approximate Reasoning*, 49(1):234–251, 2008.

[50] N. Gorogiannis and A. Hunter. Merging first-order knowledge using dilation operators. In *Proc. of International Symposium on Foundations of Information and Knowledge Systems (FoIKS'08)*, volume 4932 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 132–150. Springer, 2008.

[51] M. Grabisch, J.-L Marichal, R. Mesiar, and E. Pap. *Aggregation functions*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2009.

[52] S. O. Hansson. Kernel contraction. *Journal of Symbolic Logic*, 59:845–859, 1994.

[53] S. O. Hansson. Revision of belief sets and belief bases. In D. Dubois and H. Prade, editors, *Belief Change*, volume 3 of *Handbook of Defeasible Reasoning and Uncertainty Management Systems*, pages 17–75. Kluwer, Dordrecht, Pays-Bas, 1998.

[54] S. O. Hansson. Specified meet contraction. *Erkenntnis*, 69(1):31–54, 2008.

[55] J. Hué, O. Papini, and É. Würbel. Syntactic propositional belief bases fusion with removed sets. In *Proc. of Europ. Conf. On Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning under Uncertainty (ECSQARU'07)*, volume 4724 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 66–77. Springer, 2007.

[56] J. Hué, O. Papini, and E. Würbel. Removed sets fusion: Performing off the shelf. In *Proc. of Europ. Conf. On Artificial Intelligence (ECAI'08) (FIAI 178)*, pages 94–98, 2008.

[57] J. Hué, O. Papini, and E. Würbel. Merging belief bases represented by logic programs. In *Proc. of Europ. Conf. On Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning under Uncertainty (ECSQARU'09)*, volume 5590 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 371–382. Springer, 2009.

[58] P. Drap J. Seinturier, O. Papini. A reversible framework bases merging. In *Proc. of Int. Workshop on Non-Monotonic Reasoning (NMR'06)*, pages 490–496, 2006.

[59] S. Kaci, S. Benferhat, D. Dubois, and H. Prade. A principled analysis of merging operations in possibilistic logic. In C. Boutilier and M.Goldszmidt, editors, *Proc. of UAI'00*, pages 24–31. Morgan Kaufmann, 2000.

[60] H. Katsuno and A. O. Mendelzon. Propositional knowledge base revision and minimal change. *Artificial Intelligence*, 52:263–294, 1991.

[61] S. Konieczny. On the difference between merging knowledge bases and combining them. In *Proc. of Int. Conf. on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'00)*, pages 135–144, 2000.

[62] S. Konieczny. Using transfinite ordinal conditional functions. In *Proc. of Europ. Conf. On Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning under Uncertainty (ECSQARU'09)*, volume 5590 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 396–407. Springer, 2009.

[63] S. Konieczny, Jérôme Lang, and P. Marquis. DA^2 merging operators. *Artificial Intelligence*, 157(1-2):49–79, 2004.

[64] S. Konieczny and R. Pino Pérez. Logic based merging. *Journal of Philosophical Logic*, 40(2):239–270, 2011.

[65] S. Konieczny and R. PinoPérez. On the logic of merging. In *Proc. of Proc. of Int. Conf. on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'98)*, pages 488–498, 1998.

[66] S. Konieczny and R. Pino Pérez. Merging information under constraints: a logical framework. *Journal of Logic and Computation*, 12(5):773–808, 2002.

[67] S. Konieczny and Ramón Pino Pérez. A framework for iterated revision. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 10(3-4):339–367, 2000.

[68] D. Lehmann. Belief revision, revised. In *Proc. of Int. Joint Conf. on Artificial Intelligence (IJCAI')*, pages 1534–1540, 1995.

[69] P. Liberatore. The complexity of iterated belief revision. In *Proc. of Int. Conf. on Database Theory (ICDT'97)*, volume 1186 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 276–290. Springer, 1997.

[70] J. Lin. Integration of weighted knowledge bases. *Artificial Intelligence*, 83(2):363–378, 1996.

[71] J. Lin and A. O. Mendelzon. Knowledge base merging by majority. In R. Pareschi and B. Fronhöfer, editors, *Dynamic Worlds: From the Frame Problem to Knowledge Management*, volume 12 of *Applied Logic Series*, pages 195–218. Kluwer, 1999.

[72] P. Maynard-Zhang and D. Lehmann. Representing and aggregating conflicting beliefs. *J. Artif. Intell. Res. (JAIR)*, 19:155–203, 2003.

[73] T. Meyer. On the semantics of combination operations. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 11(1-2):59–84, 2001.

[74] M. Oussalah. Study of some algebraic properties of adaptative combination rules. *Fuzzy sets and systems*, 114:391–409, 2000.

[75] O. Papini. Iterated revision operators stemming from the history of an agent's observations. In H. Rott and M. A. Williams, editors, *Frontiers in Belief revision*, pages 281–303. Kluwer, 2001.

[76] G. Qi, W. Liu, and D. A. Bell. Merging stratified knowledge bases under constraints. In *Proc. of National Conf. on Artificial Intelligence (AAAI'06)*, pages 281–286, 2006.

[77] G. Qi, W. Liu, and D. A. Bell. A comparison of merging operators in possibilistic logic. In *Proc. Int. Conf. on Knowledge Science, Engineering and Management (KSEM'10)*, volume 6291 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 39–50. Springer, 2010.

[78] R. Reiter. A logic for default reasoning. *Artificial Intelligence*, 13:81–132, 1980.

[79] N. Rescher and R. Manor. On inference from inconsistent premises. *Theory and Decision*, 1:179–219, 1970.

[80] P. Z. Revesz. On the semantics of theory change: arbitration between old and new information. In *Proceedings of the* 12^{th} *ACM SIGACT-SIGMOD-SIGART Symposium on Principles of Databases*, pages 71–92, 1993.

[81] P. Z. Revesz. On the semantics of arbitration. *Int. J. of Algebra and Computation*, 7(2):133–160, 1997.

[82] S. Schockaert and H. Prade. Merging conflicting propositional knowledge by similarity. In *Proc. of Int. Conf. on Tools for Artificial Intelligence (ICTAI'09)*, pages 224–228. IEEE Computer Society, 2009.

[83] G. Shafer. *A Mathematical Theory of Evidence*. Princeton University Press, 1976.

[84] P. Smets. Analyzing the combination of conflicting belief functions. *Information Fusion*, 8(4):387–412, 2007.

[85] W. Spohn. Ordinal conditional functions: a dynamic theory of epistemic states. In W. L. Harper and B. Skyrms, editors, *Causation in Decision, Belief Change, and Statistics*, volume 2, pages 105–134. D. Reidel, 1988.

[86] W. Spohn. A general non-probabilistic theory of inductive reasoning. In *Uncertainty in Artificial Intelligence*, pages 149–158. Elsevier Science, 1990.

[87] P. Walley. The elicitation and aggregation of belief. Technical report, Department of Statistics, University of Warwick, Coventry, UK, 1982.

[88] M. A. Williams. Iterated theory base change: a computational model. In *Proc. of Int. Joint Conf. on Artificial Intelligence (IJCAI'95)*, pages 1541 – 1550, 1995.

[89] E. Wurbel, R. Jeansoulin, and O. Papini. Revision : An application in the framework of GIS. In *Proc. of Int. Conf. on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'00)*, pages 505–518, 2000.

[90] Y. Zhang and N. Y. Foo. Updating logic programs. In *Proc. of Proceedings of the Thirteenth European Conference on Artificial Intelligence (ECAI'98)*, pages 403–407, 1998.